Métodos probabilísticos para Engenharia
Parte 1.2

Professora Ariane Ferreira

Instituto Politécnico
Campus Regional da UERJ
Nova Friburgo - RJ

Função de Probabilidade

Definição:

•A função de probabilidade (ou probabilidade) associada a uma variável aleatória discreta ***X***, é a função ***f*** que atribui a cada valor da v.a.:

- $x_i \in \Re_X$ a probabilidade do evento **[*X* = *x*$_i$],**

$$f(x_i) = P([X = x_i]) = P(X = x_i), \quad \forall i$$

•A função de probabilidade ***f*** satisfaz:

i. ***f*(x_i) ≥0**, uma vez que ***f(xi)* = *P*([*X* = *x*$_i$])** e sendo o valor da probabilidade de um evento e sempre não negativa.

Função de Probabilidade

ii. $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$

•Como $[X = x_1]$; $[X = x_2]$; $[X = x_3]$,....,

•formam uma partição do espaço amostral Ω ,então:

$$1 \;=\; P(\Omega) = P(\cup_{x_i}^{d}[X = x_i]) = \sum_{x_i} P([X = x_i]) = \sum_{x_i} f(x_i)$$

•De fato, a função de probabilidade f e uma probabilidade no espaço amostral

$$\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}.$$

Função de Probabilidade: Exemplos

Exemplo 1

- Sejam 3 bolas em uma urna:
  - uma preta (P), outra amarela (A) e ainda uma verde (V).
- Considere o experimento retirar 2 bolas com reposição.
  - A tabela abaixo retrata as possibilidades.

$1^a \setminus 2^a$	P	A	V
P	PP	PA	PV
A	AP	AA	AV
V	VP	VA	VV

- Neste caso, o espaço amostra é:

$$\Omega = \{PP, PA, PV, AA, AP, AV, VP, VA, VV\}$$

Função de Probabilidade: Exemplos

Exemplo 1 continuação

•Seja X o número de bolas pretas :

•Então : $R_X = \{0, 1, 2\}$

•Considere que cada elemento do espaço amostral tem a mesma chance de ocorrer : ***eventos equiprováveis***.

• Temos assim as seguintes probabilidades:

$$f(0) = P(X = 0) = P(\{AA, AV, VA, VV\}) = \frac{4}{9}$$

$$f(1) = P(X = 1) = P(\{PA, PV, AP, VP\}) = \frac{4}{9}$$

$$f(2) = P(X = 2) = P(\{PP\}) = \frac{1}{9}$$

Função de Probabilidade: Exemplos

Exemplo 1 continuação

- Vamos verificar se ***f*** satisfaz as propriedades apresentadas na última observação:

$$f(0) \geq 0; \quad f(1) \geq 0; \quad f(2) \geq 0$$

$$f(0) + f(1) + f(2) = 1$$

Função de Probabilidade: formas de representação

Há diferentes formas de representar a função de probabilidade:

1. Através de uma expressão analítica:

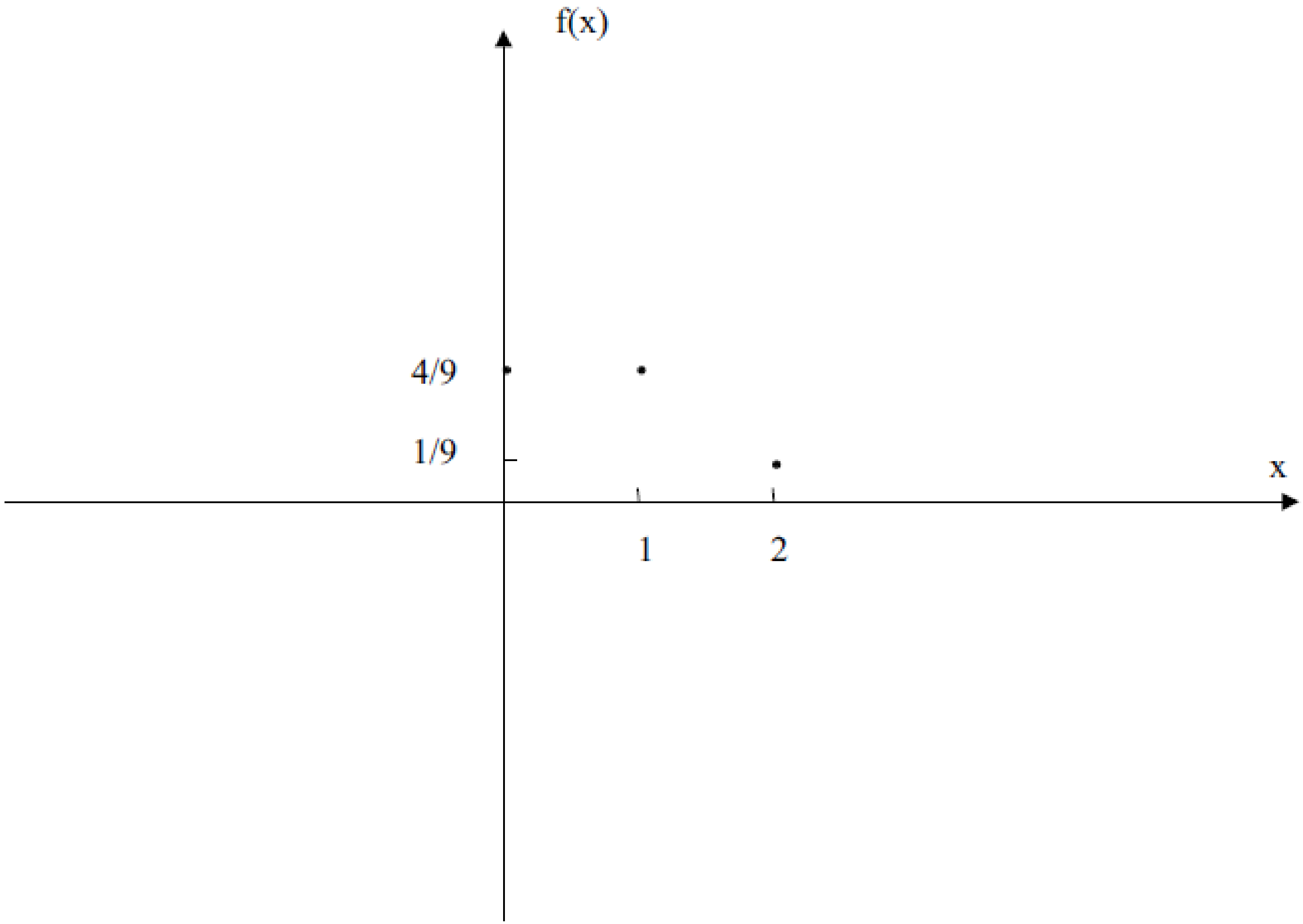
$$f(x) = \begin{cases} 4/9, & \text{se} \quad x = 0, 1 \\ 1/9, & \text{se} \quad x = 2 \\ 0, & \text{c.c. (caso contrário)} \end{cases}$$

2. com o auxílio de uma tabela:

Valores de $X = x$	0	1	2
Valores de $f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$

Função de Probabilidade: formas de representação

3. ou uma representação gráfica, veja figura:



Função de Distribuição Acumulada

Seja ***X*** uma variável aleatória discreta.

A função de distribuição acumulada de ***X***, ou simplesmente função de distribuição ou ainda distribuição acumulada, representada por F_X, ou por ***F***, é definida para valores $x \in \Re$ por:

$$F(x) = F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x; x_i \in R_X} f(x_i)$$

Exemplo: Apresentamos a seguir o cálculo da função de distribuição da v.a. X número de caras no lançamento de duas moedas.

O espaço amostral assume três valores, 0, 1 e 2, os quais são valores de transição na definição da função de distribuição acumulada.

Esses valores delimitam 4 regiões na reta: **]−∝ 0[, [0; 1[, [1; 2[e [2;+∝ [**

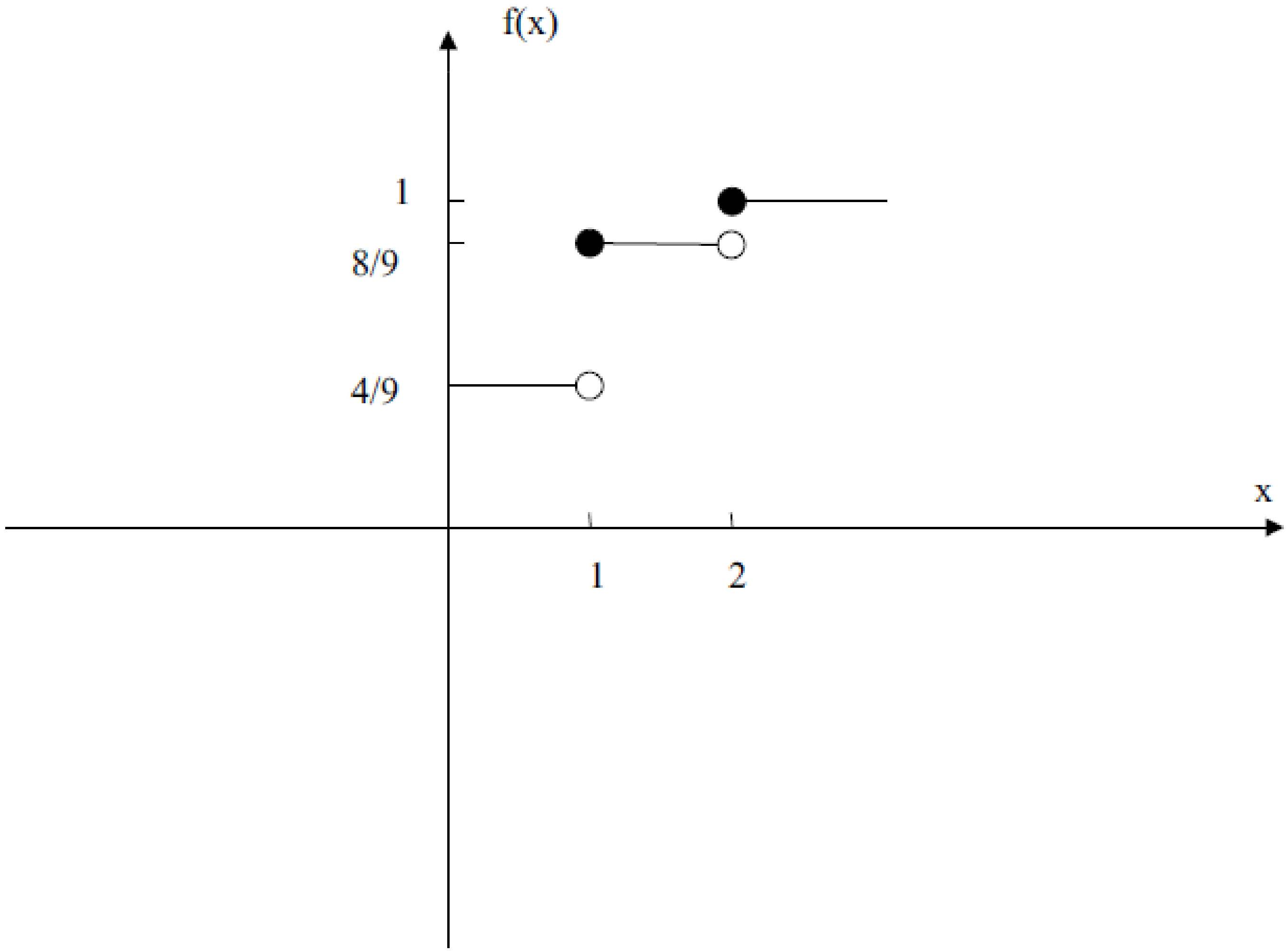
Função de Distribuição Acumulada: Exemplo

Vejamos o cálculo de ***F*** em alguns pontos:

- $F(-2) = P(X \leq -2) = 0$ (pois $\nexists x \in \mathcal{R}_X$ tal que $x \leq -2$)
- $F(-1,5) = P(X \leq -1,5) = 0$
- $F(0) = P(X \leq 0) = \underset{\underset{0}{\parallel}}{P(X < 0)} + \underset{\underset{4/9}{\parallel}}{P(X = 0)} = \dfrac{4}{9}$
- $F(2/3) = P\left(X \leq \dfrac{2}{3}\right) = \underset{\underset{0}{\parallel}}{P(X < 0)} + \underset{\underset{4/9}{\parallel}}{P(X = 0)} + \underset{\underset{0}{\parallel}}{P(0 < X \leq 2/3)} = \dfrac{4}{9}$
- $F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \dfrac{8}{9}$
- $F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 1$
- $F(3) = P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) = 1$

Função de Distribuição Acumulada

Figura da Distribuição Acumulada do exemplo:



Função de Distribuição Acumulada

Podemos escrever a Função de Distribuição Acumulada do exemplo como:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0\,, \\ 4/9 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1\,, \\ 8/9 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2\,, \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 2\,. \end{cases}$$

Note o papel de transição, na formulação analítica da função distribuição acumulada, dos valores que ***X*** assume.

Propriedades daFunção de Distribuição Acumulada

A função de distribuição (acumulada) satisfaz as seguintes propriedades:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ (pois $F(x)$ é a probabilidade do evento $[X \leq x]$.)
ii) (Não-decrescente) Se $x \leq y$ então $F(x) \leq F(y)$.

Demonstração:Dado $x \in \Re$ considere o evento **$[X \leq x]$** e denote:

$$P(X \leq x) \;=\; P([X \leq x]) = P(]-\infty, x])$$

Se **$x \leq y$** então **$[X \leq x]$** $\subset$ **$[X \leq y]$** obtemos que:

$$F(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F(y)$$

ou seja, a função de distribuição acumulada é uma função não-decrescente.

Propriedades da Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição (acumulada) satisfaz as seguintes propriedades:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ (pois $F(x)$ é a probabilidade do evento $[X \leq x]$.)

ii) (Não-decrescente) Se $x \leq y$ então $F(x) \leq F(y)$.

iii) (Comportamento assintótico) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

iv) (Função distribuição é contínua à direita).

Seja x_i um ponto de descontinuidade de F (isto é, x_i é um dos valores da v.a. Discreta X), então:

$$\lim_{x \downarrow x_i} F(x) = F(x_i)$$

Propriedades da Função de Distribuição Acumulada

As notações:

$$x \downarrow x_i,\ x \rightarrow x_i^+ \text{ e } x \searrow x_i$$

- significam que o limite é tomado pela direita de x_i
  - (ou seja, por valores superiores a x_i,
  - e assim todas as igualdades abaixo, mesmo a última, significam limite pela direita de uma função qualquer F,

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} F(x) = \lim_{x \downarrow x_i} F(x) = \lim_{x \searrow x_i} F(x) = F(x_i^+)$$

Propriedades da Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição (acumulada) satisfaz as seguintes propriedades:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ (pois $F(x)$ é a probabilidade do evento $[X \leq x]$.)
ii) (Não-decrescente) Se $x \leq y$ então $F(x) \leq F(y)$.
iii) (Comportamento assintótico) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
iv) (Função distribuição é contínua à direita).

v) O salto que F dá em x_i é igual à probabilidade de $[X = x_i]$, $P(X = x_i) = f(x_i)$. O salto é definido por:

$$F(x_i) - \lim_{x \to x_i^-} F(x) = f(x_i)$$

Onde: $x \longrightarrow x_i^-$ significa que o limite étomado pela esquerda de ***x_i***, isto é, por valores interiores a xi. Temos que:

$$\lim_{x \to x_i^+} F(x) - \lim_{x \to x_i^-} F(x) \quad = \quad F(x_i) - \lim_{x \to x_i^-} F(x) = f(x_i)$$

Propriedades da Função de Distribuição Acumulada

Temos que:

$$\lim_{x \to x_i^+} F(x) - \lim_{x \to x_i^-} F(x) = F(x_i) - \lim_{x \to x_i^-} F(x) = f(x_i)$$

No exemplo temos:

$$\begin{aligned} f(2) &= F(2) - F(2^-) = 1 - 8/9 = 1/9 \\ f(1) &= F(1) - F(1^-) = 8/9 - 4/9 = 4/9 \\ f(0) &= F(0) - F(0^-) = 4/9 - 0 = 4/9 \end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

As v.a. contínuas surgem muitas vezes quando consideramos a medição de grandezas fsicas como, por exemplo, o comprimento de uma barra de ferro, ou a sua massa, ou o tempo de evaporação de uma certa quantidade de água.

Uma propriedade de uma v.a. contínua é que haverá um intervalo

finito ou infinito, i.e., **[a, b[;] -∝,a[; [b,+∝[** no qual a v.a. assume qualquer um dos valores do intervalo.

Função densidade de Probabilidade

Uma função ***f*** que satisfaça as seguintes propriedades é chamada função de densidade de probabilidade (***fdp***):

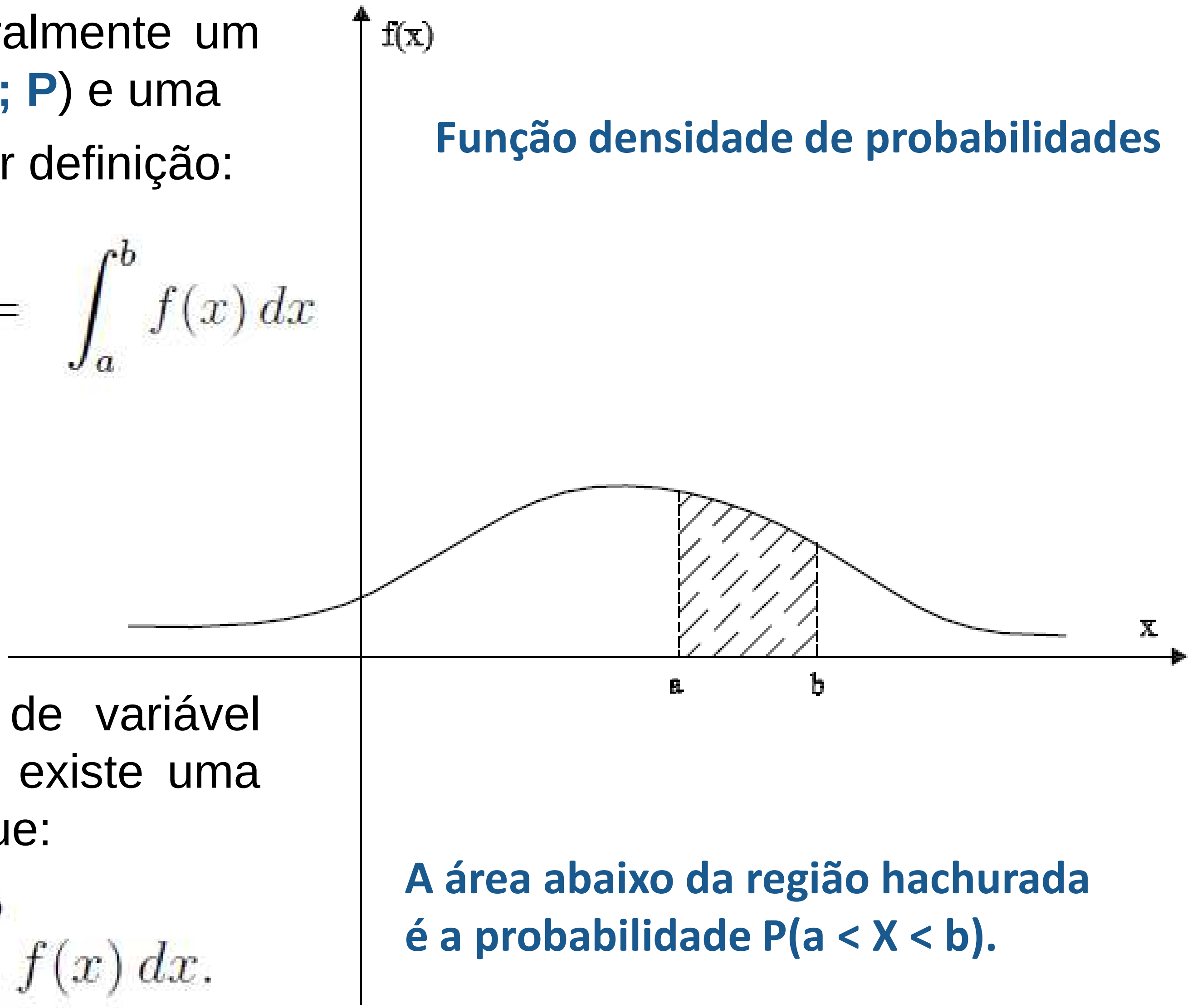
i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ valor de $\mathbb{R}$.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$

Variáveis Aleatórias Contínuas: fdp

Dada ***f*** há associado naturalmente um espaço de probabilidade (**$\Re$; P**) e uma v.a. ***X, X(x) = x***, tais que, por definição:

$$P([a,b]) = \underset{P(\{\omega | a \leq X(\omega) \leq b\})}{\underset{\shortparallel}{P(a \leq X \leq b)}} \models \int_a^b f(x)\,dx$$



Função densidade de probabilidades

A área abaixo da região hachurada é a probabilidade P(a < X < b).

Uma v.a. ***X,*** é chamada de variável aleatória contínua, quando existe uma função de densidade ***f*** tal que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Propriedades

Propriedades:

1. Se ***X*** é uma v.a. contínua, a probabilidade de ocorrência de um ponto é **nula** dado que:

$$P(X = a) = P(a \le X \le a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

2. Se X é uma v.a. Contínua, então,

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b).$$

Este resultado provém do fato expresso no item acima que a probabilidade de ocorrência de um ponto é nula e que a probabilidade de eventos disjuntos é a soma das probabilidades dos eventos.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Propriedades

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \overset{=}{\text{por def.}} \quad P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(a < X \leq b)$$

$$\text{Assim, } P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) \text{ já que } P(X = a) = 0.$$

3. $P(a \leq X \leq b)$ representa a área embaixo do gráfico de **f** entre os pontos ***a*** e ***b.***

4. A chance relativa de 2 pontos ***a*** e ***b*** é dada pelo quociente:

$$q = \frac{f(b)}{f(a)}$$

Se $q > 1$ diz-se que b tem mais chances de ocorrer do que a.

Se $q = 1$ diz-se que a e b têm a mesma chance de ocorrer.

Se $q < 1$ diz-se que a tem mais chances do que b de ocorrer.

Ambos os pontos têm probabilidade nula de ocorrer.

Isto NÃO signfica que é impossível ser sorteado um desses pontos.

Sair um ponto específico é um evento possível, pode ocorrer, apesar de ter probabilidade nula.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exemplos

Exemplo: A função de densidade de Y é:

$$f(y) = \begin{cases} K(y-2)^2 \text{ para } 0 < y < 2 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule :

a) A constante K.

b) P(0 < Y < 1).

c) A função de distribuição de Y .

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exemplos

Solução do Exemplo: A função de densidade de Y é:

$$f(y) = \begin{cases} K(y-2)^2 \text{ para } 0 < y < 2 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) A constante K.

$$\text{a) } \int_0^2 f(y)dy = 1 \Rightarrow \int_0^2 K(y-2)^2 dy = 1 \Rightarrow \left.\frac{K(y-2)^3}{3}\right|_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{8}{3}K = 1$$

Resposta. $\boxed{K = \frac{3}{8}}$

b) P(0 < Y < 1).

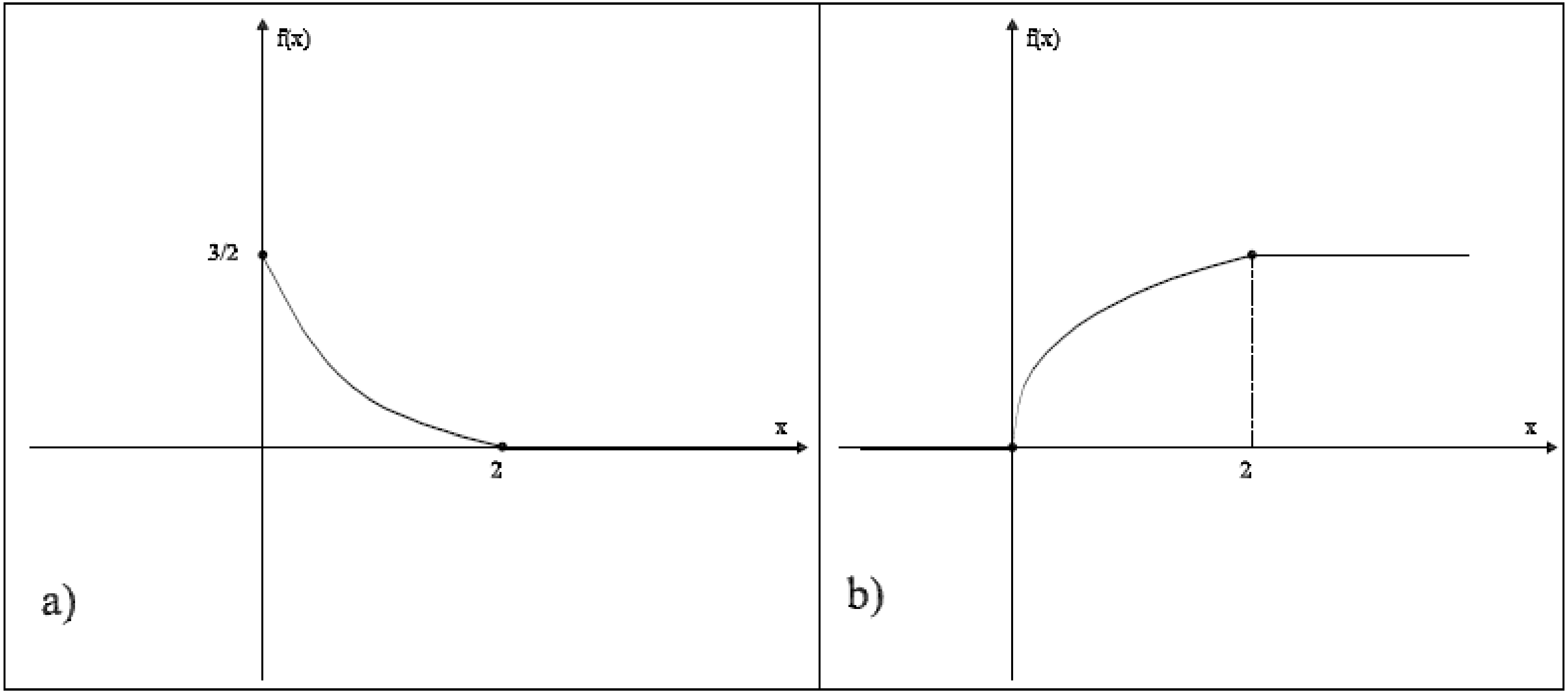
$$\text{b) } \int_0^1 f(y)dy = \int_0^1 \frac{3}{8}(y-2)^2 dy = \frac{3}{8} \cdot \left.\frac{(y-2)^3}{3}\right|_0^1 = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$$

Resposta. $P(0 < Y < 1) = 7/8.$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exemplos

Grafico do Exemplo: a)Função densidade de probabilidade;

b)Função distribuição de probabilidade**.**



Variáveis Aleatórias Contínuas: Exemplos

Exemplo: A função de densidade de Y é:

$$f(y) = \begin{cases} K(y-2)^2 \text{ para } 0 < y < 2 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

c) A função de distribuição de Y .

$$\text{c) } F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(u)\,du.$$

Pela expressão da função densidade, vemos que há dois pontos de transição, o zero e o dois, definindo 3 intervalos:

$$\text{Intervalos} \begin{cases} \text{de } -\infty \text{ a } 0 \;\therefore\; y \leq 0 \\ \text{de } 0 \text{ a } 2 \;\therefore\; 0 < y < 2 \\ \text{acima de } 2 \;\therefore\; y \geq 2 \end{cases}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exemplos

Resolução do Exemplo:

$$\text{Intervalos} \begin{cases} \text{de } -\infty \text{ a } 0 \ \therefore \ y \leq 0 \\ \text{de } 0 \text{ a } 2 \ \therefore \ 0 < y < 2 \\ \text{acima de } 2 \ \therefore \ y \geq 2 \end{cases}$$

1. Se y ≤ 0 :

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{y} 0\,du = 0$$

2. Se 0 < y < 2 :

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{y} f(u)\,du$$

$$= \int_{0}^{y} \frac{3}{8}(u-2)^2\,du = \left.\frac{(u-2)^3}{8}\right|_{0}^{y} = \frac{(y-2)^3}{8} + 1$$

3. Se y ≥ 2:

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exemplos

Resolução do Exemplo:

3. Se $y \geq 2$:

$$\text{Intervalos} \begin{cases} \text{de } -\infty \text{ a } 0 \ \therefore \ y \leq 0 \\ \text{de } 0 \text{ a } 2 \ \therefore \ 0 < y < 2 \\ \text{acima de } 2 \ \therefore \ y \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{2} f(u)\,du + \int_{2}^{y} f(u)\,du$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{3}{8}(u-2)^2\,du = \left.\frac{(u-2)^3}{8}\right|_0^2 = +1 \quad \text{(como previsto)}$$

Então temos a função:

$$F_Y(y) \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0 \\ 1 + \frac{(y-2)^3}{8}, & \text{se } 0 < y < 2 \\ 1, & \text{se } y \geq 2 \end{cases}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Propriedades

Propriedades: Se ***X*** é uma v.a. contínua com **fdp *f*** e ***F*** é a função de distribuição, então:

1. F é uma função contínua;
2. F é não-decrescente
3. Então: $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$
4. Se f é contínua, então:
$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$
5. X é uma v.a. contínua . Então:

$$F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b).$$

$$\begin{aligned} P(X \leq b) &= P(]-\infty, b]) = P(]-\infty, a] \overset{d}{\cup}]a, b]) \\ &= P(]-\infty, a]) + P(]a, b]) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b) \end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Propriedades

5. X é uma v.a. contínua . Então:

$$F(b)-F(a) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b).$$

$$\begin{aligned} P(X \leq b) &= P(]-\infty, b]) = P(]-\infty, a] \overset{d}{\cup}]a, b]) \\ &= P(]-\infty, a]) + P(]a, b]) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b) \end{aligned}$$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

O conhecimento da função de distribuição acumulada permite o cálculo de probabilidades (lado direito acima), sem se utilizar a ***fdp***.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exemplos

Exemplo: Considere a função distribuição acumulada obtida no exemplo anterior:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{(x-2)^3}{8} + 1, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Determine a função densidade de probabilidade;

b)A partir da função de distribuiçãoo acumulada é possível determinar-se a probabilidade de eventos sem recorrer à função de densidade.

Desta forma calcule $P(0 \leq X \leq 1)$.

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exemplos

Solução do Exemplo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{(x-2)^3}{8} + 1, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

a)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{3}{8}(x-2)^2, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{3}{8}(x-2)^2, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

b) $P(0 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0) = \dfrac{7}{8} - 0 = \dfrac{7}{8}$

Parâmetros da Distribuição

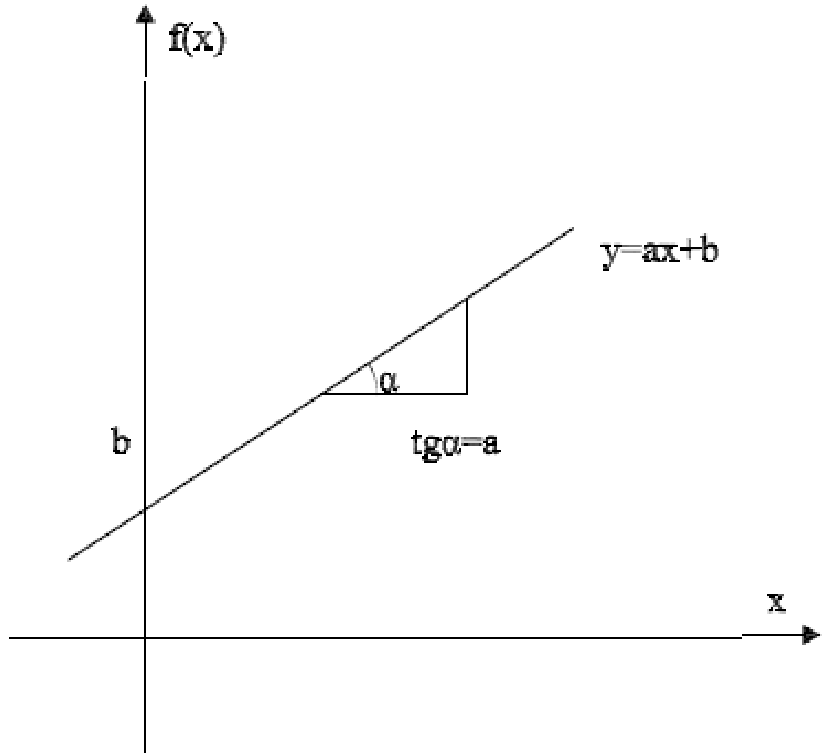
Usualmente, os parâmetros de uma v.a. são a esperança e a variância

Por analogia, em um modelo linear $y = ax + b$

Temos os parâmetros, ***a*** e ***b***, que apresentam interpretações específicas,

b representa a interseçãoo com o eixo dos y's e

a representa a inclinação da reta.



Modelo linear, uma reta

Esperança de uma Variável Aleatória Discreta

O valor esperado ou esperança de uma variável aleatória discreta, ***X***, também chamado de média da v.a. é:

$$\mathrm{E}\,(X) = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

Onde $P(X = x_i) = f(x_i)$ é a função de probabilidade da v.a.

Exemplo: Calcule a esperança no lançamento de um dado.

Solução: Os valores que ***X*** assume são **X=1,2,3,4,5,6** com probabilidade 1/6.

$$\mathrm{E}\,(X) = \sum_{x_i} x_i P_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + 1 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Interpretação: Se lançar o dado sucessivas vezes, a média dos resultados encontrados tenderá a ser 3,5:

mas podendo ser mais ou menos, é um valor aproximado.

Esperança de uma Variável Aleatória Discreta

Exemplo: Seja **X** uma variável aleatória, assumindo os valores -1, 0, 1 e 2 respectivamente com probabilidades 0,10; 0,25; 0,30; 0,35.

Calcule a esperança de **X**.

Solução:

$$\mathrm{E}(X) = (-1)\cdot(0,10) + 0\cdot 0,25 + 1\cdot 0,30 + 2\cdot 0,35 = 0,9$$

Observação: A esperança ou média de uma variável aleatória discreta **X** nada mais é, do que uma média ponderada dos valores de **X**, x_i, com pesos $P(X = x_i)$;

Interpretação Física: Centro de Massa

Centro de Massa: Suponhamos que temos uma barra cujo peso seja despresível e que nas posições x_i tenhamos partículas pontuais com massa m_i,

Uma pergunta natural é saber onde posicionar o dedo para conseguir que as massas à esquerda do dedo equilibrem as massas à direita.

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \ldots x_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n} \\ &= \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \ldots x_n \cdot m_n}{\text{`massa total'}} \end{aligned}$$

Onde a `massa total' é dada pela soma das massas de cada uma das partículas,

$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. Neste caso, x_p é chamado de centro de massa da barra e x_p é obtido através de uma média ponderada dos x_i's.

Note que $p_i = m_i/M$ pode ser pensado como uma função de probabilidade definida em cada uma das posições, $p_i = P(X = x_i)$, uma vez que $1 \geq pi \geq 0$.

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \frac{m_1}{M} + \ldots + \frac{m_n}{M} = \frac{m_1 + \ldots + m_n}{M} = 1$$

Interpretação Física: Centro de Massa

Centro de Massa:

Assim $x_p = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n.$

É a posição do centro de massa e é a esperança de uma v.a.

Inversamente, a eserança pode ser interpretada como o centro de massa:

$$\begin{aligned} x_p &= x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n. \\ &= \frac{x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n}{1} \\ &= \frac{x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + \ldots p_n} \\ &= \frac{x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n}{\text{`massa total'}} \end{aligned}$$

Esperança de uma variável aleatória contínua

Seja ***X*** uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade ***f***.

A esperança de ***X*** é:

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Quando esta integral existe e é finita: $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx < \infty.$

Exemplo: Seja **X** uma variável aleatória, com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 2/3, & \text{se} \quad 0 < x < 3/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule ***E(X)*** e interprete o resultado do problema como sendo a posição do centro de massa.

Esperança de uma variável aleatória contínua

Solução do Exemplo: à partir da definição:

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{0}^{3/2} \frac{2}{3}\, dx = \left.\frac{x^2}{3}\right|_{0}^{3/2} = \frac{3}{4}\,.$$

Calcule ***E(X)*** e interprete o resultado do problema como sendo a posição do centro de massa.

Este exemplo admite uma interpretação de cálculo do centro de massa de uma barra.

Assuma que temos uma barra começando em 0 e terminando em 3/2, com densidade uniforme (constante) e igual a 2/3.

Neste caso, como E (X) representa o centro de massa, devemos esperar que, devido à uniformidade, este esteja localizado no meio da barra, isto é, em 3/4, o que de fato se verfica, E (X) = ¾ (meio da barra).

Esperança de Função de uma variável aleatória

Seja ***X*** uma v.a. e ***Y = h(X)*** uma função de ***X***.

Então *Y* também é uma v.a.

Assim, podemos determinar sua função de probabilidade (no caso discreto) ou sua densidade de probabilidade no caso contínuo, a função de distribuição, F_Y , e seus parâmetros, a esperança, **E (Y)**, e a variância, Var (X).

a) Se ***X*** for discreta então:

$$\mathrm{E}\,(Y) = \mathrm{E}\,(h(X)) = \sum_{x_i} h(x_i)P(X = x_i)$$

b) Se ***X*** for contínuo com ***fdp***, ***f***, então:

$$\mathrm{E}\,(Y) = \mathrm{E}\,(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,dx$$

Assim para calcular a esperança de ***Y*** não é necessário calcular a função de probabilidade (no caso discreto) ou a fdp (no caso contínuo) da v.a. ***Y*** .

Esperança de Função de uma variável aleatória

Exemplo: Seja ***X*** o tempo que uma peça é banhada em um tratamento químico e *Y* =0,003***X***^{2} a espessura superficial resultante.

Assuma que o tempo do banho é uma v.a. uniforme:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule o valor esperado da espessura da camada superficial.

Solução:

$$\mathrm{E}\,(Y) = \mathrm{E}\,(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx = \int_0 0,003x^2 \cdot \frac{1}{10}\, dx = 0,1$$

Propriedades da Esperança

a) Se ***X* = *C***, onde ***C*** é uma constante (***P***(***X* = *C***) = 1) então **E (*X*) = *C*.**

Demonstração: $\mathrm{E}\ (X) = \sum_{i=1}^{1} C \cdot 1 = C$

b) Se **b** é uma constante e **X** uma v.a., então:

Caso contínuo: $\mathrm{E}\ (bX) = b\,\mathrm{E}\ (X).$

Demonstração:

$$\mathrm{E}\ (bX) = \int_{-\infty}^{\infty} bx\, f(x)\, dx = b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx}_{\mathrm{E}\ (X)} = b\,\mathrm{E}\ (X)$$

Porque a esperança satisfaz as propriedades (b) e (d) diz-se que a esperança é (uma função) linear.

c) Se **a** e **b** são constantes, então: $\mathrm{E}\ (aX + b) = a\mathrm{E}\ (X) + b.$

Propriedades da Esperança

d) Sejam ***X*** e ***Y*** duas v.a.quaisquer. Então $\mathrm{E}\,(X+Y) = \mathrm{E}\,(X) + \mathrm{E}\,(Y).$

Duas v.a. ***X*** e ***Y*** são independentes se e só se os eventos:

$[a < X \leq b]$ e $[c < Y \leq d]$ forem independentes para todos os valores de **a,b,c,d**.

e) Se ***X*** e ***Y*** , forem v.a. Independentes , então: $\mathrm{E}\,(XY) = \mathrm{E}\,(X)\mathrm{E}\,(Y).$

Variância de uma variável aleatória

A média é um importante parâmetro de uma v.a., mas não serve para distinguir comportamentos bastante distintos de v.a.

Isto é, há v.a. com comportamentos muito diversos, mas com a mesma média.

Exemplo: Sejam **X, Y , Z** e **W** as v.a. abaixo:

Calculamos a esperança de cada uma das variaveis:

$$X = 0 \quad \text{com prob. } 1$$

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{com prob. } 1/2 \\ 1 & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} -100 & \text{com prob. } 1/2 \\ 100 & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

$$W = \begin{cases} -100 & \text{com prob. } 3/4 \\ 300 & \text{com prob. } 1/4 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}\,(X) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\mathrm{E}\,(Y) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathrm{E}\,(Z) = (-100) \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathrm{E}\,(W) = -100 \cdot \frac{3}{4} + 300 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Note que as 4 v.a. têm a mesma esperança mas são v.a. completamente diferentes. Não é possível distinguílas através da esperança.

O conceito de variância ajuda na distinção dessas v.a.

Variância de uma variável aleatória

Dada uma v.a. **X**, a variância de **X** é: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right).$

e o desvio padrão de **X** é: $\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$

Observações:

1) Note que: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$ então:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2 - 2X(\mathrm{E}(X)) + (\mathrm{E}(X))^2\right) \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}\left(X(\mathrm{E}(X))\right) + \mathrm{E}\left((\mathrm{E}(X))^2\right) \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X) + (\mathrm{E}(X))^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2
\end{aligned}$$

Variância de uma variável aleatória

2) Se E (X^2) = esperança de uma função da v.a. X (a função quadrado) é dada por:

$$\mathrm{E}\ (X^2) = \begin{cases} \sum_i x_i^2\, P(X = x_i), & \text{se } X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx, & \text{se } X \text{ é contínua} \end{cases}$$

Assim:

$$\mathrm{Var}\ (X) = \mathrm{E}\ (X - \mathrm{E}\ (X))^2 = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^2\, P(X = x_i), & \text{se } X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, & \text{se } X \text{ é contínua} \end{cases}$$

Ou ainda usando: $\mathrm{Var}\ (X) = \mathrm{E}\ (X^2) - (\mathrm{E}\ (X))^2$

$$\mathrm{Var}\ (X) = \begin{cases} \sum_i x_i^2\, P(X = x_i) - \left(\sum_i x_i\, P(X = x_i)\right)^2 & \text{se } X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx\right)^2 & \text{se } X \text{ é contínua} \end{cases}$$

Variância de uma variável aleatória

3) Note que se **[X] = U**, **X** tem unidade **U**,

- então a unidade de Var (X) é U^2, [**Var (X)**] = **U^2**,
- e assim a unidade do desvio padrão será U, [**DP (X)**] = **U**,ou seja tem a mesma unidade que a v.a. (o que é uma vantagem com relação à variância).

4) Tanto o desvio padrão como a variância são uma medida da **dispersão**,isto é, o **espalhamento** dos valores da v.a. **X** em torno de **E**(**X**) no sentido que:

i.quanto maiores forem DP (X) ou Var(X), mais dispersos são os valores de X;

ii.quanto menores forem DP (X) ou Var(X), menos dispersos da média são os valores de X.

5) São comuns as seguintes notações:

$$\mu = E(X), \sigma^2 = Var(X), \sigma = DP(X)$$

Variância de uma variável aleatória

Exemplo: Sejam **X, Y , Z** e **W** as v.a. Abaixo e sabendo que

E(X)=E(Y)=E(Z)=E(W)=0

$$X = 0 \quad \text{com prob. } 1$$

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{com prob. } 1/2 \\ 1 & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} -100 & \text{com prob. } 1/2 \\ 100 & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

$$W = \begin{cases} -100 & \text{com prob. } 3/4 \\ 300 & \text{com prob. } 1/4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\,(X) &= \text{E}\,(X^2) - (\text{E}\,(X))^2 = 0^2 \cdot 1 - 0^2 = 0 \\ &\Rightarrow \text{DP}\,(X) = \sqrt{0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\,(Y) &= \text{E}\,(Y^2) - (\text{E}\,(Y))^2 = \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(1)^2}{2} - 0^2 = 1 \\ &\Rightarrow \text{DP}\,(Y) = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\,(Z) &= \text{E}\,(Z^2) - (\text{E}\,(Z))^2 = \frac{(100)^2}{2} + \frac{(-100)^2}{2} - 0^2 = 10.000 \\ &\Rightarrow \text{DP}\,(Z) = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\,(W) &= \text{E}\,(W^2) - (\text{E}\,(W))^2 = (-100)^2 \cdot \frac{3}{4} + (300)^2 \cdot \frac{1}{4} = 3.000 \\ &\Rightarrow \text{DP}\,(W) = \sqrt{3000} = 10\sqrt{30} \end{aligned}$$

Variância de uma variável aleatória

Exemplo: Calcule Var (*X*) e DP (*X)* da v.a. *X* cuja *fdp* é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Solução:

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{10} x f(x) dx = \int_0^{10} \frac{x}{10} dx = \left.\frac{x^2}{20}\right|_0^{10} = 5$$

$$\mathrm{E}\,(X^2) = \int_0^{10} x^2 f(x) dx = \int_0^{10} \frac{x^2}{10} dx = \left.\frac{x^3}{10 \cdot 3}\right|_0^{10} = \frac{100}{3}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(X) &= \mathrm{E}\,(X^2) - (\mathrm{E}\,(X))^2 = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3} \\ \mathrm{DP}\,(X) &= \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cong 2,89 \end{aligned}$$