Processos Estocásticos

Professora Ariane Ferreira

Instituto Politécnico
Campus Regional da UERJ
Nova Friburgo - RJ

Conteúdos das Aulas

1. Apresentação da disciplina e introdução aos Processos Estocásticos (PE)
2. Conceitos de Probabilidades
3. Variaveis aleatorias
4. Introdução aos Processos Estocásticos
5. Processos de Poisson
6. Cadeias de Markov
7. Passeio Aleatorio
8. Teoria das filas
9. Processos de incrementos independentes

Aulas

Total de Aulas Teóricas: 24

Não havera aulas dias 18/12/2012 e 20/12/2012;

Alunos realizarão seminários sobre aplicações em Eng Computação/ modelagem computacional:

1. Cadeias de Markov
2. Passeio Aleatorio
3. Teoria das filas
4. Processos de Poisson

Avaliação

40% Nota : realização e entrega do seminário.

60% Nota : Prova única com questões multipla escolha e exercícios sobre o conteudo total.

Datas:

Prova Geral: 21/02/2013

Recuperação PG: 28/02/2013

Substitui obrigatoriamente a nota da Prova Geral.

Bibliografia

1.Hoel, Port & Stone, Introduction to Stochastic Processes;
2.Grinstead,C.M. & Snell,J.L., Introduction to Probability;
3.Sheldon Ross, Stochastic Processes.
4.Papoulis, A. "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", McGraw-Hill, Graw_Hill, 3rd edition, 1999.
5.Peebles, P. Z. , "Probability and Random Variables and Random Signal Principles", 4th edition, 2001. McGraw-Hill.
6.Leon-Garcia, A. "Probability and Random Processes for Electrical Engineers", 2nd edition, Addison Wesley, 1994.
7.Meyer, P. L. "Probabilidade: aplicações à estatística", Rio de Janeiro: LTC, 1989.
8.Spiegel, M. R., Schiller, J. e Srivasan, R. A. " Probabilidade e Estatística", Coleção Schaum, Bookman, 2a edição, 2004.
9.Clarke, A. Bruce e Disney, Ralph. "Probabilidade e processos estocásticos"

Web site da disciplina: http://wiki.nosdigitais.teia.org.br/Processos_Estocasticos
Lista google: UERJ_EC_Processos_Estocasticos

Processos Estocásticos

Definição:

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias indexadas por elementos *t* pertencentes a determinado intervalo temporal.

Intuitivamente, se uma variável aleatória é um número real que varia aleatoriamente, um processo estocástico é uma função temporal que varia aleatoriamente.

De forma simplificada, podemos dizer que processos estocásticos são processos aleatórios que dependem do tempo.

Processos Estocásticos

Mais genericamente, seguindo Kac[1] e Nelson[2], qualquer tipo de evolução temporal (determinística ou essencialmente probabilística) que seja analisável em termos de probabilidade pode ser chamada de processo estocástico.

1. M. Kac & J. Logan, in Fluctuation Phenomena, eds. E.W. Montroll & J.L. Lebowitz, North-Holland, Amsterdam, 1976
2. E. Nelson, Quantum Fluctuations, Princeton University Press, Princeton, 1985

Passeio do Bêbado

Imagine um bêbado, que após muito caminhar consegue enxergar sua casa.

Supondo que o caminho esteja desimpedido, o instinto o levará a tentar caminhar em linha reta;

A questão é que a bebida não permite.

Se traçarmos um sistema cartesiano de modo que o bêbado esteja na origem e a casa em algum ponto do eixo das ordenadas, o bêbado é uma partícula caminhando para cima, pois a linha reta é o caminho mais curto;

Passeio do Bêbado

O vetor deslocamento não coincide com o vetor (0,1), pois o bêbado cambaleia para a direita ou esquerda aleatoriamente,

- fazendo com que a posição no bêbado no instante t seja (x_t,t),
- supondo velocidade constante no eixo das ordenadas, onde x_t é um valor aleatório.

A sequência de valores x_t e suas variáveis aleatórias associadas X_t recebem o nome de cadeia, um caso especial de processo estocástico.

Exemplo

Tipicamente, estudamos apenas sistemas markovianos, sistemas onde

$$P(X_t = x_t|\mathbb{P}) = P(X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1})$$

- onde P(A|B) é a probabilidade do evento A ocorrer dado que o evento B ocorreu e
- $\mathbb{P}$ são as posições anteriores do bêbado.

Passeio do Bêbado

$$P(X_t = x_t|\mathbb{P}) = P(X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1})$$

Esta relação de probabilidades quer dizer que a única informação que pode nos ajudar a prever onde o bêbado estará no próximo instante de tempo é a posição do bêbado no momento atual, sendo que a trajetória anterior, velocidade resultante, etc... não nos fornecem nenhuma informação extra.

Passeio do Bêbado

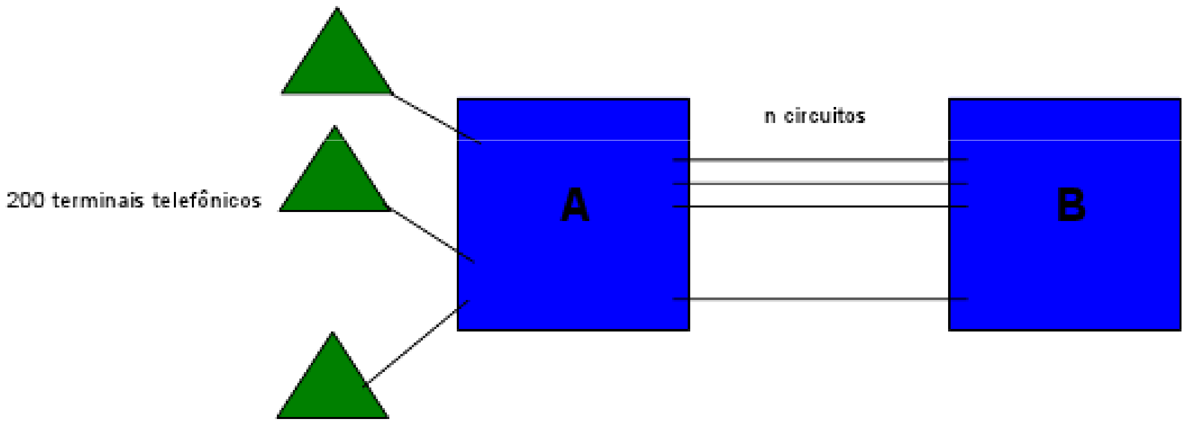
Em muitas análises físicas estudamos sistemas complexos de um ponto de vista macroscópico, por exemplo, o movimento browniano é definido pela temperatura de cada patícula do sistema, mas não temos como mensurar tal temperatura.

Sob suposições gerais, tais sistemas comportam-se como nosso bêbado do exemplo acima; podemos estimar apenas a probabilidade de mudança de estado do sistema.

Alguns Exemplos

Tráfego telefônico

Duzentos terminais telefônicos são ligados a uma central A.



Deseja-se determinar o número de circuitos que devem ser instalados entre a central **A** e uma central **B** para atender o tráfego de **A** para **B**.

Alguns Exemplos

Tráfego telefônico:
Soluções

- Colocar 200 circuitos entre A e B

- Perguntar a cada assinante o horário que ele usará o telefone.
  Determina-se o número máximo de chamadas simultâneas e faz n=max

Estas seriam características de um modelo determinístico

Dentro de um modelo probabilístico seria interessante pensar em um *comportamento médio*

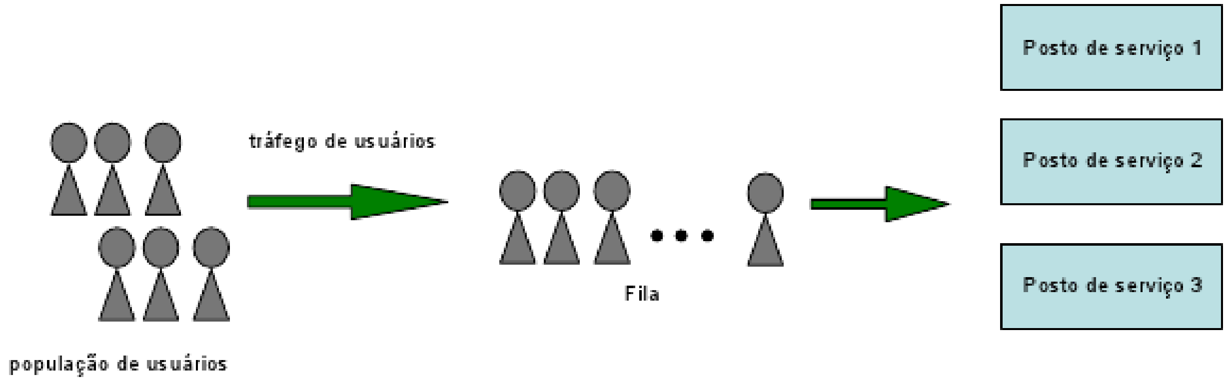
Alguns Exemplos

Tráfego telefônico:
outro olhar

Teoria das filas

3 elementos:

- tráfego de entrada
- fila
- posto de serviço



Modelos Probabilísticos

- TRÁFEGO DE ENTREGA : como os usuários vão requerer os serviços?
- Qual o tempo de duração do POSTO DE SERVIÇO?
- Tamanho máximo da FILA?

Existe uma grande relação entre problemas de *tráfego telefônico* e *teoria das filas*

Exemplo: Ruído

Exemplo 1: Circuitos eletrônicos

Ruído gerado externamente provém de circuitos nas proximidades, descargas atmosféricas, etc.

Ruído gerado internamente: ruído térmico

Nos dois casos acima os sinais são imprevisíveis

Para análise destes sinais são usadas ferramentas da teoria das probabilidades e dos processos estocásticos

Caracterização do Ruido térmico

Devido ao movimento dos elétricos provocada pela agitação térmica, aparecerá uma corrente e consequentemente uma tensão de ruído nos terminais do resistor.

Comportamento de Falha

Qual o tempo exato no qual um determinado componente (gerador) funciona?

As causas nem sempre são determinísticas.

É necessário fazer indagações menos rigorosas:

- Qual o tempo médio de vida dos componentes?

- Na média, qual o tempo de vida não excedido por 99,9% dos componentes?

Análise de Séries Temporais

Previsão do valor de uma variável ocorrendo em algum instante de tempo futuro, a partir do valor presente e de um conjunto de valores passados da variável.

Aplicações:

- fenômenos naturais (meteorologia)
- processos industriais

Sistemas de telecomunicações

Em um sistema digital, o sinal a ser transmitido é transformado em uma sequência de dígitos binários.

O transmissor associa ao dígito 0 um determinado sinal (ausência de transmissão) e ao dígito 1 um outro sinal (pulso retangular de amplitude A)

O receptor deseja reconstruir a sequência transmitida: ele amostra o sinal recebido no ponto médio do intervalo corresponde a cada dígito e decide se foi transmitido 0 ou 1.

Na presença de ruído, o processo de decisão é mais complexo.

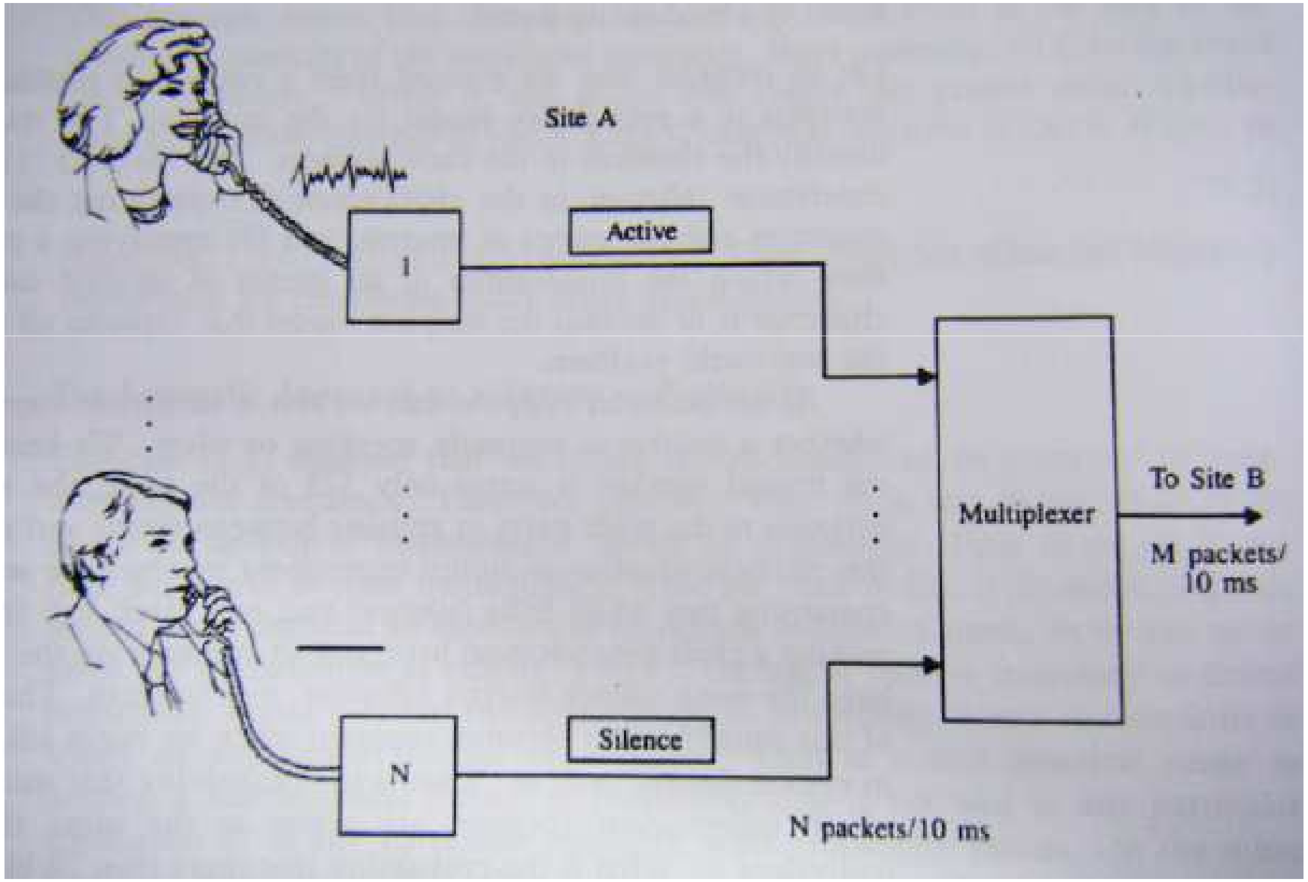
Sistema de transmissão de pacotes de voz

- Necessitamos de um sistema de comunicação que suporte 48 conversações simultâneas da cidade A para B usando “pacotes” de voz.

A voz é digitalizada e a informação agrupada em segmentos de 10ms

Os endereços da fonte e destino são acrescentados a cada pacote de voz.

Sistema de transmissão de pacotes de voz



Sistema de transmissão de pacotes de voz

- Um projeto simples seria:

  48 pcts a cada 10ms em cada direção.

- 2/3 dos pcts contém silêncio => na média 48 falantes produzem 48/3=16 pcts ativos a cada 10ms.

Sistema de transmissão de pacotes de voz vamos considerar um sistema com M<48

- A cada 10ms determina-se quais falantes produziram pcts com voz.

- Considere isto um experimento aleatório com A= número de pcts ativos a cada 10ms

- Valores de A: $0 \leq A \leq 48$

  ninguém fala   todo mundo fala

Sistema de transmissão de pacotes de voz vamos considerar um sistema com M<48

- Entretanto, se A>M, o sistema não transmite todos os pctes ativos.
- A-M pctes são selecionados aleatoriamente e descartados
- Precisamos manter o descarte em um nível aceitável

Frequências Relativas

- Suponha que o experimento seja repetido *n* vezes
- A(j) é a saída da j-ésima repetição
- $N_k(n)$ número de repetições nas quais o número de pacotes ativos é *k*.
- A frequência relativa de *k* nas *n* primeiras repetições

$$f_k(n) = \frac{N_k(n)}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_k(n) = p_k$$

- Fração de pacotes ativos descartados pelo sistema em *n* repetições:

$$\frac{numero\ de\ pacotes\ descartados}{numero\ de\ pacotes\ produzidos} = \frac{\sum_{k=M+1}^{48} (k-M)N_k(n)}{\sum_{k=0}^{48} kN_k(n)}$$

- Se dividirmos por *n*, e *n* for grande teremos a expressão em termos de probabilidades

$$\frac{\sum_{k=M+1}^{48} (k-M)N_k(n)/n}{\sum_{k=0}^{48} kN_k(n)/n} = \frac{\sum_{k=M+1}^{48} (k-M)p_k}{\sum_{k=0}^{48} kp_k}$$

Podemos avaliar as medidas de desempenho do problema por meio de probabilidades p_k

Taxa de Produção dos Pacotes

- Média amostral do número de pctes ativos a cada 10ms:

$$< A >_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} A(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{48} k N_k(n)$$